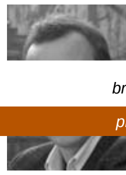
ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura
CLXXXIII 725 mayo-junio (2007) 383-393 ISSN: 0210-1963

LAS MATEMÁTICAS DEL CONTROL

Enrique Fernández-Cara
Departamento E.D.A.N. Universidad de Sevilla

Universidad Autónoma de Madrid



ABSTRACT: *In this article we discuss some issues related with Control Theory addressing its origin, main motivations and historical evolution. We describe some of the fundamental mathematical ingredients of the theory, and some of the major breakthroughs, characterized both by their mathematical depth and their implications from a technological, industrial and social viewpoint. We also mention some challenging open problems that will very likely influence the development of the discipline in the coming years.*

KEY WORDS: *Control theory, history, progresses, applications, open problems.*

RESUMEN: En este artículo analizamos algunos aspectos de la Teoría de Control que incluyen consideraciones sobre sus orígenes, sus motivaciones y su evolución. Describimos algunos elementos matemáticos fundamentales y diversos avances que se caracterizan a la vez por su interés científico y su transcendencia desde un punto de vista social, tecnológico e industrial. También, mencionamos algunos de los retos que se plantean en esta disciplina para un futuro inmediato.

PALABRAS CLAVE: Teoría del Control, historia, avances, aplicaciones, problemas abiertos.

1. Misión y conceptos clave

S. Bennet inicia su libro [3], dedicado a la historia de la Ingeniería del Control, con la siguiente cita de Aristóteles del capítulo 3 del primer volumen de "Política"

> *... Si cada instrumento pudiera llevar a cabo su propia función, respondiendo o anticipándose al trabajo de otros... Si la lanzadera tejiese y la púa tocase el arpa sin una mano que los guiara, los patronos no necesitarían ni sirvientes ni capataces.*

Esta idea, expresada con enorme acierto por Aristóteles, refleja de manera transparente lo que ha sido el motor de la Ingeniería del Control y de su teoría matemática: la automatización de los procesos para la liberación y mejora de la calidad de vida del ser humano. La palabra "control" implica "actuación" y refleja el esfuerzo humano para intervenir en el medio que le rodea para garantizar su supervivencia y una permanente mejora en la calidad de vida.

Muchos de los problemas de control pueden analizarse a través de un modelo matemático que describe el sistema físico en consideración a través de la *ecuación de estado*

$$A(y) = f(v). \tag{1.1}$$

Aquí, y es la solución, el *estado*, la variable que proporciona información sobre el "status" del sistema y v es el *control*, la variable que podemos elegir con libertad en U_{ad} (el conjunto de controles admisibles) para actuar sobre el mismo. En la práctica (1.1) es una ecuación o sistema algebraico o funcional (integral, diferencial ordinario, en derivadas parciales, etc.), eventualmente completado con condiciones iniciales, de contorno u otras.

"Controlar" el sistema (1.1) es hallar v en U_{ad} tal que la solución de (1.1) verifique un objetivo prefijado. Cuando esta propiedad se cumple se dice que el sistema es *controlable* y, cuando lo es, con frecuencia, existe más de un control que satisface el objetivo. En estos casos es natural seleccionar un *control óptimo,* de talla mínima en una determinada norma.

Esta formulación puede parecer sofisticada e incluso oscura a los lectores no familiarizados con este tema.

Sin embargo, ha surgido de manera natural a lo largo de la historia de esta disciplina y posee la gran ventaja de unificar el planteamiento de problemas de naturaleza muy distinta.

La disciplina del Control ha existido desde hace mucho tiempo, incluso antes de haber recibido esa denominación. Ciertamente, en el mundo de los seres vivos, los organismos están dotados de mecanismos que regulan las diferentes tareas que realizan. Esto garantiza que las variables esenciales pertenezcan a regímenes óptimos y las especies se mantengan con vida y capaces de crecer, desarrollarse y reproducirse.

Así, las ideas clave de la Teoría de Control son familiares a todos, dado que tienen su origen en la Naturaleza. La primera de ellas es el concepto de *feedback* (o retroalimentación). Este término fue incorporado a la Ingeniería del Control en los años 20 por el "Bell Telephone Laboratory" pero en esa época estaba ya consolidado en otras áreas, como por ejemplo la Economía Política.

En el contexto de (1.1), llamaremos *feedback* a toda ley que permita determinar el control v a partir de la solución asociada de (1.1).

Dicho de otro modo, un proceso en feedback es aquél en el cual el estado del sistema determina en cada momento el modo en el que debe actuar el control. Esta estrategia está relacionada con la noción de *control en tiempo real,* muy importante en las aplicaciones.

Hoy día, los procesos en *feedback* son ubicuos y aparecen en disciplinas tan diversas como la Economía, Biología, Psicología, etc. De acuerdo con ello, en muchas áreas diferentes, el clásico principio de causa-efecto ya no se entiende como una ley estática, sino que se observa desde una perspectiva dinámica. Así, debemos hablar más bien del principio de causa-efecto-causa. Para una discusión sobre el tema, véase por ejemplo [15].

Una segunda idea clave está recogida en el siguiente párrafo, escrito por H. R. Hall en 1907 y tomado de [3]:

> *It is a curious fact that, while political economists recognize that for the proper action of the law of supply and demand there must be fluctuations, it has not generally been recognized by mechanicians in this matter of the steam engine governor. The aim of the mechanical engineer, as is that of the political economist, should be not to do away with these fluctuations all together (for then he does away with the principles of self-regulation), but to diminish them as much as possible, still leaving them large enough to have sufficient regulating power.*

La necesidad de permitir las fluctuaciones propias de un sistema corresponde a nuestra experiencia diaria. Por ejemplo, cuando conducimos un vehículo a gran velocidad y deseamos frenar, generalmente tratamos de hacerlo intermitentemente, intentando mantener el vehículo bajo control en todo momento. En el contexto de las relaciones humanas, es también claro que insistir en exceso en la misma idea no es necesariamente el mejor modo de convencer a alguien de algo.

La misma regla se aplica para el control de un sistema: Con carácter general, es preferible repartir o distribuir la acción del control, renunciando incluso a actuar en determinados instantes, y no actuar ininterrumpidamente desde el momento inicial sobre el sistema[1]. Muy a menudo, es mucho más eficiente controlar tratando de mantener una armonía que permita evolucionar hacia la situación deseada sin brusquedad. En efecto, un exceso de control podría conducir a un coste inadmisible y también a daños irreversibles en el sistema en consideración.

En la Teoría de Control, otro concepto importante es el de "optimización". La *Optimización* se caracteriza por ser una rama de las Matemáticas cuyo objetivo es mejorar una variable con vistas a maximizar un beneficio (o minimizar un coste). Esto se puede aplicar a muchas situaciones prácticas distintas (la variable puede ser una temperatura, un campo de velocidades, una medida de la información, etc., véase [12]) y la Teoría de la Optimización y sus técnicas constituyen un campo de trabajo de tal magnitud que es imposible hacer aquí una presentación unificada.

En la práctica, un problema tipo en optimización es aquél en el que se desea conducir la solución (1.1) a un estado objetivo y_d y para ello se minimiza la distancia entre y e y_d. Así, con este planteamiento, un problema de control se reduce al cálculo de puntos extremales con restricciones (y esto explica la íntima conexión de la Teoría de Control con la Optimización a la que nos hemos referido).

ARBOR CLXXXIII 725 mayo-junio [2007] 383-393 ISSN: 0210-1963

Hemos mencionado algunos de los pilares de la Teoría de Control: automatización, *feedback,* presencia de fluctuaciones y optimización. Otros muchos conceptos y puntos de vista han jugado un importante papel en el desarrollo de esta disciplina, como es el caso de la "Cibernética". Este término fue propuesto por el físico francés A.-M. Ampère en el siglo XIX y resurgió cuando N. Wiener, en 1948, tituló como "Cybernetics" uno de sus libros. Wiener definió la Cibernética como "la Ciencia del control y la comunicación entre animales y máquinas". De este modo, estableció una primera conexión de la Teoría de Control con la Fisiología y describió y enfatizó lo que, a su juicio, debería ser un futuro deseable: las máquinas obedeciendo e imitando a los seres humanos. En aquella época todo esto no era más que ficción, pero ahora la situación es completamente diferente, dado que los desarrollos recientes han hecho posible un gran número de aplicaciones en robótica, diseño asistido por ordenador, etc. (véase [20] para una recopilación). Hoy día la Cibernética no es ya un sueño, sino una realidad que empezamos a encontrar por todas partes.

2. Orígenes y evolución

Con frecuencia también se utiliza la denominación de *Ingeniería del Control* y cabe preguntarse si esta disciplina y la llamada Teoría Matemática de Control son verdaderamente distintas. Pero el que haya una doble denominación es más bien una prueba del vigor de un campo genuinamente multidisciplinar y transversal en el que intervienen numerosas técnicas de la Ciencia y la Tecnología. Con el objeto de entender mejor la coexistencia y el uso de estos dos términos, conviene adoptar un punto de vista histórico.

Buscando atrás en la Historia, podríamos llegar a la conclusión de que ya en el diseño de los acueductos romanos, que tenían un sistema de válvulas para mantener un nivel constante de agua, había elementos propios de la Teoría de Control. De hecho, el control de los sistemas de irrigación era un arte bien dominado en Mesopotamia hacia 2000 A. C. En el antiguo Egipto existía el oficio de los "harpenodaptai" o " estiradores de cuerdas", que tenían como objetivo producir largos segmentos rectos que ayudasen a la construcción de pirámides. Se considera que esto es una evidencia de que ya por entonces se había comprendido no sólo que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta (el principio más clásico y fundamental de la Optimización y del Cálculo de Variaciones), sino también que, de entre todos los caminos de longitud dada, el rectilíneo es el que maximiza la distancia entre los dos extremos (la versión dual del principio precedente). El trabajo de los "harpenodaptai" consistía precisamente en producir estas rectas que desempeñan el papel de curvas extremales u óptimas.

En los trabajos de Ch. Huygens y R. Hooke sobre la oscilación del péndulo a finales del siglo XVII, cuyo objetivo último era una medición precisa del tiempo, aparecen de nuevo elementos de lo que hoy conocemos como Teoría de Control. El objetivo entonces era proporcionar instrumentos que sirviesen a la navegación y, en particular, al control del posicionamiento de los navíos.

Estos trabajos fueron después adaptados a la regulación de la velocidad en los molinos de viento, utilizando un sistema mecánico de bolas que giraban en torno a un eje cuya velocidad de rotación fuese proporcional a la de las aspas del molino. Cuando la velocidad de giro aumentaba excesivamente, las bolas se alejaban del eje, frenando las alas del molino a través de ingeniosos mecanismos y manteniendo de ese modo una velocidad aproximadamente constante.

James Watt adaptó este principio a la máquina de vapor, dando así un enorme impulso a la revolución industrial.

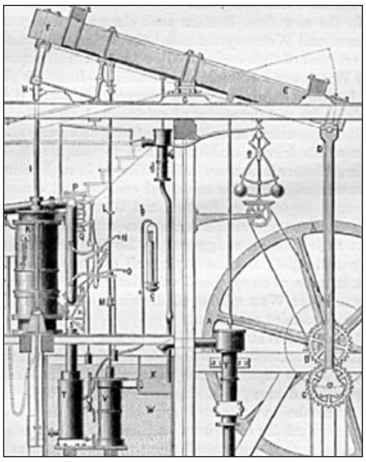


Fig. 1. Máquina de vapor de Watt, 1781 (tomada de [23]).

El astrónomo inglés Georges Airy fue el primero en intentar describir y explicar el comportamiento del regulador de bolas de Watt en términos matemáticos. Pero fue sólo en 1868 cuando el físico escocés J. C. Maxwell realizó el primer análisis teórico convincente, explicó algunos de los comportamientos un tanto erráticos que se observaban en las máquinas de entonces y propuso diversos mecanismos de control.

A través de la revolución industrial, las ideas propias de lo que hoy se denomina Teoría de Control fueron tomando cuerpo y haciéndose más y más presentes. De este modo, la Ingeniería del Control germinó y empezó a ser reconocida como una disciplina científico-tecnológica con entidad propia.

En los años 30 se comenzó a asumir que la Ingeniería del Control formaba parte importante del entramado de la Ingeniería de Sistemas Complejos. Paralelamente, se produjo un importante avance en todo lo relacionado con el control automático y las técnicas de diseño y análisis. Las aplicaciones eran numerosas: amplificadores en sistemas telefónicos, el sistema de distribución de plantas eléctricas, la estabilización de aviones, los mecanismos eléctricos para la industria papelera, química, del petróleo y del acero, etc.

De este modo fueron surgiendo gradualmente nuevos y sólidos conceptos y para finales de esa década se contaba ya con dos métodos emergentes, pero diferenciados: un primer método basado en la utilización de ecuaciones diferenciales y otro, de carácter frecuencial, basado en el análisis de la relación entre la amplitud y fase de la entrada (el "input") y de la salida (el "output").

Ya para entonces las instituciones comenzaban a tomar conciencia de la relevancia de la disciplina del control automático. Era el caso, por ejemplo, de la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos (ASME) en Estados Unidos y de la Institución de Ingenieros Eléctricos (IEE) en Gran Bretaña.

Durante la Segunda Guerra Mundial y los años que la siguieron, los ingenieros y científicos tuvieron que afinar su experiencia en los mecanismos de control de seguimiento de aviones y de proyectiles antiaéreos y en el diseño de baterías antiaéreas.

A partir de 1960, todo lo que acabamos de describir comenzó a conocerse como la Teoría de Control "clásica". En la década de los 60 comienza una nueva era en la que se hace frente a algo que se había puesto de manifiesto con claridad en los desarrollos previos: los modelos utilizados hasta ese momento eran inadecuados para representar la complejidad del mundo real, puesto que éste, con frecuencia, tiene un comportamiento *no lineal y no determinista.*

Las contribuciones de R. Bellman (programación dinámica), de R. Kalman (filtrado y análisis algebraico de problemas de control) en los Estados Unidos y de L. Pontryagin (principio del máximo para problemas de control óptimo no-lineal) en la Unión Soviética establecieron los pilares fundamentales de la investigación en Teoría de Control de las últimas décadas.

A esta lista es adecuado añadir el nombre de J.-L. Lions[2], ilustre matemático aplicado francés, que influyó de manera decisiva en el desarrollo de esta disciplina y en particular en sus conexiones con las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP), el Análisis Numérico y las aplicaciones industriales. El papel de las Matemáticas no ha hecho más que crecer en las últimas décadas en el mundo del Control. R. Kalman, uno de los grandes protagonistas de la Teoría de Control moderna señaló en 1974 en su artículo [10] que, en el futuro, los avances en la Teoría de Control y la Optimización de sistemas complejos vendrían de la mano de progresos matemáticos más que tecnológicos. Hoy en día es tan fuerte el impulso de las nuevas tecnologías que resulta arriesgado mantener esta afirmación. Lo que

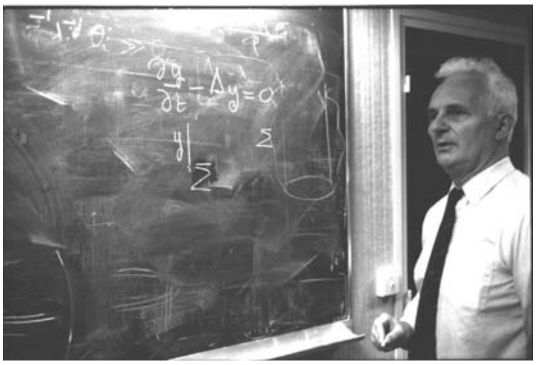


Fig. 2. J.-L. Lions (1927-2001)

sí se puede garantizar es que todo avance sustancial en Teoría de Control exige esfuerzos tanto en el ámbito de la teoría matemática correspondiente como en el contexto tecnológico.

En este artículo no pretendemos, ni mucho menos, hacer un repaso exhaustivo de la Teoría de Control ni presentar el estado del arte en el campo. Se trata de una disciplina tan rica que esta tarea excede con creces las dimensiones del mismo. Los lectores interesados podrán aprender más sobre estos temas a través de la bibliografía presentada al final.

3. Algunas aplicaciones: de la cisterna a los robots

Son numerosas las aplicaciones de la Teoría de Control tanto en la vida diaria como en los procesos tecnológicos e industriales más sofisticados. En el libro editado por W. S. Levine [11], se recoge un buen número de ellas. Algunas son tan simples como el mecanismo de funcionamiento de la cisterna de nuestro cuarto de baño. Son muchas las variantes (existen patentes que datan ya del año 1886), pero todas ellas funcionan sobre los mismos principios básicos. Lo que es más sorprendente es que en un mecanismo tan simple y cotidiano encontremos ya algunos de los elementos básicos de todos los procesos de control. Efectivamente, la cisterna está dotada de válvulas reguladoras, de mecanismos que desencadenan el proceso de control que, en función del nivel de líquido captado por los sensores, suministran más o menos agua al depósito y de otros que, en el caso de algún fallo, evitan las siempre desagradables inundaciones.

Los mecanismos de control del ruido en las aeronaves modernas, a pesar de ser mucho más sofisticados desde el punto de vista tecnológico, funcionan sobre principios semejantes.

Como hemos dicho, la lista de ámbitos industriales en los que la Teoría de Control interviene de manera decisiva es muy larga: la industria papelera, la automovilística, la seguridad nuclear, los sistemas de defensa, los sistemas de calefacción, ventilación y aire acondicionado en los grandes edificios, los lectores de discos compactos, las redes de generación y suministro eléctrico, los dispositivos de reducción del ruido, etc.; sin olvidar las crecientes aplicaciones en la Medicina actual como el diseño de corazones artificiales o de mecanismos de suministro de insulina.

Con frecuencia, los sistemas a los que se tiene que hacer frente son sumamente complejos e incluso pueden presentar dinámicas caóticas. De hecho, el control del caos es un tema de gran actualidad. En efecto, la naturaleza caótica de un sistema puede ser un serio obstáculo para su control, pero también puede convertirse en un aliado. Por ejemplo, las impresionantes piruetas en las trayectorias de aviones de combate, están basadas en el control a lo largo de trayectorias inestables. Es también en el campo de la Aeronáutica, donde el control de la turbulencia juega un papel fundamental; véase por ejemplo [13, 16]. En este campo, además de estos aspectos relacionados con el control activo de trayectorias, se realiza permanentemente un importante esfuerzo también de control pasivo, consistente en el diseño óptimo u optimización de las formas de las aeronaves, para que éstas sean más seguras, silenciosas, rápidas, para que consuman menos combustible, etc.; véase [14, 17]. Esto exige la combinación de sofisticadas técnicas de modelado, Mecánica de Fluidos Computacional, Optimización, y Computación y es un ámbito en el que los países líderes en Ciencia y Tecnología hacen importantes inversiones.

Podríamos ampliar esta lista de importantes aplicaciones. Las estaciones espaciales que incorporan plataformas, reflectores ópticos de grandes dimensiones, los sistemas de comunicación mediante satélites, etc., son ejemplos aún más sofisticados pero que van a ser cada vez más frecuentes y relevantes. El control de robots, desde los más simples, hasta los bípedos que reproducen la capacidad locomotriz del ser humano, es otro de los temas que atrae buena parte de la atención de la Teoría de Control hoy día.

La Teoría Matemática subyacente a éstas y otras aplicaciones es también impresionante. Para una introducción a la misma en la que se abordan algunos ejemplos prácticos como el péndulo, un modelo simplificado de automóvil, el diseño molecular y algunos problemas relacionados con el medio ambiente, véanse los artículos más extensos [8] y [24]. El lector interesado en una introducción a las técnicas matemáticas básicas en la Ingeniería del Control y sus aplicaciones más comunes podrá consultar los libros [6] y [19].

4. La barrera del Támesis: Un ejemplo de control ambiental

En los últimos años es creciente la presencia de las Matemáticas en los diversos ámbitos de las Ciencias de la Vida.

Así, las Matemáticas a través de sus especialidades más aplicadas como pueden ser las Ecuaciones en Derivadas Parciales y el Análisis Numérico no se ocupan ya sólo de los modelos clásicos de la Mecánica del Continuo, sino que también abordan cuestiones relacionadas con la Biología, la Medicina, la Metereología, etc.

La barrera del Támesis, que describimos brevemente en esta sección, es sin duda un ejemplo excelente de aplicación de las Matemáticas y en particular de la Teoría de Control al medio ambiente. Recientemente, el trágico "tsunami"[3] que devastó el sur de Asia nos ha recordado hasta qué punto es importante desarrollar también teorías que nos permitan predecir y mantenernos al abrigo de las posibles catástrofes naturales.

Fig. 3. Barrera del Támesis

Para los que viven y trabajan cerca de las costas la importancia de ser capaces de predecir el estado del mar con el objeto de protegerse de posibles inundaciones es evidente. Éstas se producen a través de complejas interacciones de las mareas, olas y tormentas.

Los vientos y las variaciones de la presión atmosférica debidas a una tormenta pueden producir elevaciones o depresiones de varios metros en el nivel del mar en un período de tiempo que puede ir de varias horas a dos o tres días. Los vientos también generan olas con períodos de hasta veinte segundos y longitudes del orden de decenas de metros. El efecto combinado de estos dos factores puede entrañar un importantísimo riesgo de destrucción e inundación.

La amplitud del desastre depende frecuentemente de un posible efecto de acumulación. Si estas elevaciones y olas se producen cuando la marea es alta, el riesgo de inundaciones es evidentemente mucho mayor.

Este problema ha llegado a ser considerado como una verdadera prioridad en muchos lugares de nuestro planeta. Sin ir más lejos, en Londres se tiene constancia desde la Edad Media de inundaciones regulares, algunas de ellas muy importantes, debidas a elevaciones inesperadas en el nivel del Támesis. La elevación del agua puede incluso superar en más de dos metros el nivel medio esperado. Por otra parte, el nivel medio del agua en el puente de Londres se eleva unos 75 centímetros cada siglo a causa del derretimiento de los hielos polares y esto hace que el problema sea cada vez más grave.

El proceso por el que se producen estas inundaciones es en grandes líneas el siguiente. Con las bajas presiones atmosféricas en la costa de Canadá, el mar se eleva unos 30 centímetros en una zona de unos 1.600 kilómetros de diámetro. Esta elevación de agua se propaga a través del Atlántico a una velocidad de 80-90 kilómetros por día, hasta llegar al norte de Inglaterra. Ocasionalmente, los vientos septentrionales pueden empujar esta elevación a lo largo del Mar del Norte, inyectando en el Támesis millones de toneladas de agua adicional, que son empujadas río arriba.

En 1953 hubo una inundación desastrosa en la que perecieron más de 300 personas, que cubrió de agua unas 64.000 hectáreas. En ese momento el Gobierno Británico decidió constituir un comité de expertos que puso entonces de manifiesto la necesidad de desarrollar algún tipo de mecanismo de defensa. Pero no hubo consenso sobre cuál era la mejor solución.

Finalmente, en 1970 se tomó la decisión de construir una barrera que se cierra cuando las previsiones indican un peligroso aumento en el nivel medio de agua. Tras ocho años de trabajo en el que intervinieron más de 4.000 personas, la barrera fue inaugurada en 1984. La barrera está constituida por diez enormes compuertas de acero construidas sobre estructuras de hormigón y ancladas en el lecho del río, dotadas de una maquinaria que permite el tráfico con normalidad cuando están abiertas y su cierre en caso de necesidad. Desde que se construyó, la barrera ha sido cerrada en tres ocasiones. En las Figuras 4 y 5[4], se muestra un esquema del mecanismo utilizado y del funcionamiento del mismo.

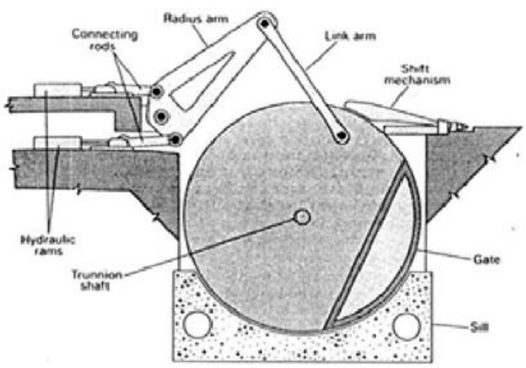


Fig. 4. Esquema interno

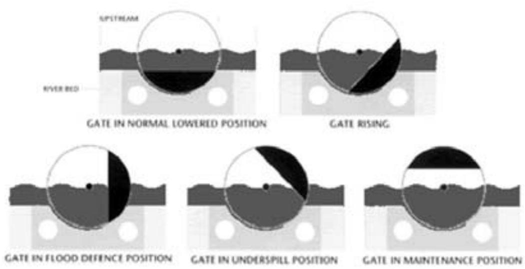


Fig. 5. Funcionamiento

Obviamente, conviene cerrar la barrera tan pocas veces como sea posible, puesto que esto interfiere en la navegación, causando pérdidas económicas y trastornos importantes. Una vez cerrada, la barrera no puede volver a ser abierta hasta que los niveles de agua de ambos lados están igualados, siendo el tiempo medio de cierre de unas ocho horas. Por otra parte, el proceso de cierre dura unas dos horas, de modo que no se puede esperar a tener constancia visual del aumento del nivel del agua para proceder al mismo, sino que éste debe iniciarse sobre la base de predicciones.

Con el objeto de tomar la decisión de cerrar la barrera sólo cuando es imprescindible se necesitan métodos de previsión sumamente fiables que se realizan a partir de un modelo mixto que incluye un sistema para las mareas en torno a las Islas Británicas y un sistema de previsión meteorológica. De este modo, se obtienen previsiones cada hora con 30 horas de antelación en puntos seleccionados en torno a la costa.

Este modelo es simulado en el supercomputador de la Oficina Metereológica Británica y los resultados se tranfieren al ordenador de la Barrera del Támesis. A su vez, estos datos se trasladan a otro modelo a mayor escala, en el que intervienen el Mar del Norte, el Estuario del Támesis y la parte baja del río a la que afectan las mareas. Los resultados obtenidos se comparan con las previsiones medias. En base a este análisis, la autoridad de la barrera está habilitada a tomar la decisión de cerrarla.

Los modelos que en la actualidad se utilizan son sistemas de EDPs que se resuelven mediante métodos numéricos de tipo diferencias finitas. Desde los años sesenta, tanto los modelos como los métodos numéricos han ido evolucionando, lo cual, junto a la enorme capacidad de cálculo de los ordenadores de los que hoy se dispone, permite cálculos sumamente fiables.

A pesar de que la barrera responde a las necesidades de hoy, el problema no está resuelto a largo plazo. En efecto, tal y como decíamos, el nivel medio del río sube 75 centímetros cada siglo de modo que, con el tiempo, este método dejará de ser eficiente.

5. Algunas observaciones adicionales y perspectivas futuras

Son muchos los campos de la Ciencia y Tecnología donde se presentan retos para la Teoría de Control.

En algunos casos se confía en ser capaces de resolver éstos mediante avances tecnológicos que permitan la implementación de controles más eficientes. Es el caso por ejemplo del control molecular mediante tecnología láser; véase [4]. Pero tanto en ésta como en otras muchas aplicaciones se necesitan también importantes avances teóricos.

En esta sección mencionamos brevemente algunos de estos temas. El lector interesado en una discusión más detallada puede consultar los dos informes de la sociedad SIAM sobre el tema [21] y [18].

• **Robótica.** La Robótica es una de las áreas de la Tecnología que presenta los retos más estimulantes para los próximos años y la Teoría de Control está también en el centro de gravedad en este campo, puesto que su desarrollo depende de manera fundamental de la eficiencia y robustez de los algoritmos computacionales de control.

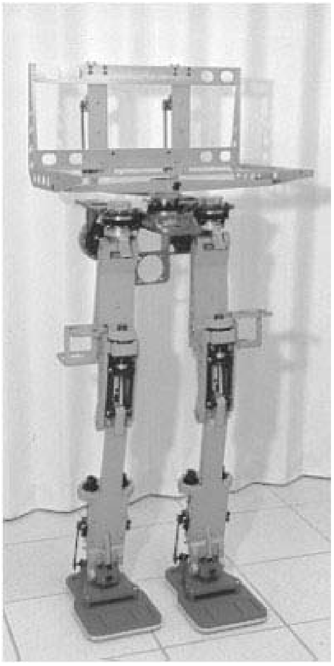


Fig. 6. El robot antropomórfico BIP2000

A este respecto, no resulta difícil imaginar la complejidad del proceso de control que hace que un robot camine de manera estable o sea capaz de coger con sus "manos" un objeto. En la página web del "Robotics and Automation Laboratory", de la Universidad de Tsinghua, Japón[5] puede encontrarse más información a este respecto.

En la página web de de R. Kennaway[6], de la Universidad de East Anglia (Norwich, Reino Unido), se muestran varias simulaciones adicionales. En la Figura 6 mostramos una imágen ilustrativa del bípedo BIP2000 diseñado en el "Institut National de Recherche en Informatique et Automatique" (Rocquencourt, Francia)[7]. En [5] se describe una panorámica de la investigación en este campo hoy día.

• **Control de Fluidos.** La interacción de la Teoría de Control con la Mecánica de fluidos es en estos momentos muy intensa. Tal y como hemos mencionado, se trata de un tema particularmente importante en Aeronáutica; véase [17].

Desde una perspectiva teórica, muchas dificultades están ya presentes cuando se analiza la controlabilidad de las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes (véase [7] para un sumario de resultados conocidos).

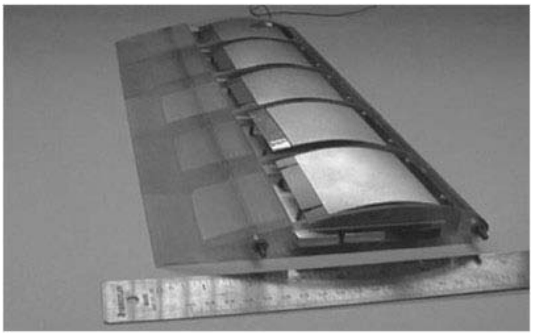


Fig. 7. El dispositivo completo

Son muchos los grupos que trabajan en los aspectos computacionales relacionados con el control de fluidos. En la página web de M. Hinze[8], de la Universidad de Hamburgo (Alemania), se mustran simulaciones numéricas que ponen de manifiesto la importancia del efecto del control en el flujo en torno a un obstáculo. En la página web[9] de la Universidad de Kentucky, Estados Unidos, puede verse una serie de experimentos relacionados con el control activo de alas de avión realizados por N. J. Pern and J. Jacob. En las Figuras 7-9 se muestran resultados experimentales que ilustran el efecto del control. Éste se activa desde el interior del ala y consiste en un mecanismo que modifica adecuadamente el perfil. Compárense las líneas de corriente en la Figura 9; en el segundo caso, el punto de separación de la capa límite ha sido considerablemente retrasado, el perfil se vuelve aerodinámico y el flujo en torno al obstáculo se estabiliza.

• **Control de la combustión.** Gran parte de la energía que consumimos procede de la combustión. Por éste y otros motivos, los avances en el diseño de mecanismos de combustión más eficientes poseen grandes repercusiones económicas y medioambientales. Así, el control de la combustión es un tema en el que se realizarán importantes esfuerzos en los próximos años. Para detalles concretos sobre este ámbito de aplicación, véanse por ejemplo [2] y la página web del "Japanese Institute of Aerospace Technology"[10].

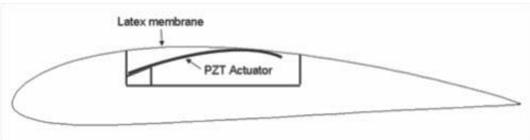


Fig. 8. Esquema del dispositivo

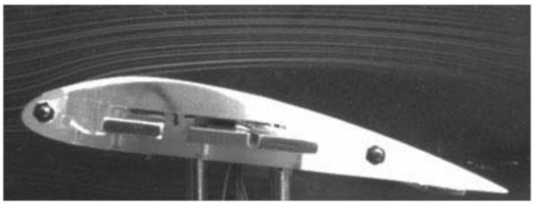
• **Investigación biomédica.** El diseño de terapias médicas adecuadas depende en gran medida de una buena comprensión de la dinámica fisiológica y el control de los procesos de este tipo constituye un campo sumamente activo, donde casi todo está por hacer desde un punto de vista matemático. Como ejemplo ilustrativo, merece la pena mencionar el diseño de mecanismos de suministro de insulina equipados de "chips" de control.

Para comprender la complejidad y el interés de las cuestiones que surgen en este ámbito, véase el artículo de E. Sontag (Universidad de Rutgers, Estados Unidos)[11] y la bibliografía que en él se da.

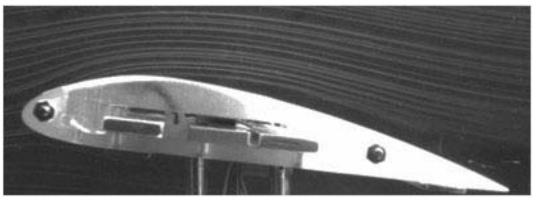
Recientemente, ha recibido gran atención el control de sistemas de EDPs que modelan el crecimiento de tumores. En este contexto, aparecen de manera natural complicados problemas de frontera libre cuyas propiedades teóricas no son por el momento del todo conocidas; véase por ejemplo [9, 22]. Tiene entonces perfecto sentido plantear problemas de control óptimo donde el control es una variable que determina el tipo e intensidad de la terapia a emplear (estimulación de la inmunoterapia, radioterapia, quimioterapia, etc.) y el *funcional coste* que se desea minimizar mide la patología del tumor.

También tiene sentido preguntarse por la *controlabilidad* de estos sistemas. En otras palabras, conviene saber responder a la pregunta *¿Es posible conducir el sistema desde una situación inicial desfavorable* (*en un instante inicial* $t = 0$) hasta una situación final deseable (en el tiempo $t = T$) *con una elección apropiada del control?*

Obsérvese que una respuesta positiva a esta cuestión, seguida de una estrategia de elección de controles adecuados abre el camino al diseño de nuevas terapias. Para consideraciones sobre estas cuestiones y otras similares, véase por ejemplo [1] y las referencias allí citadas.



(a) Sin control



(b) Con control

Fig. 9 (a) y (b). Las líneas de corriente

Recibido: 22 de febrero de 2007
Aceptado: 1 de marzo de 2007

NOTAS

1 Por ejemplo, supongamos que (1.1) es un problema de valores iniciales para un sistema diferencial ordinario que arranca de un instante inicial $t = 0$ y que la propiedad deseada de y es que su valor en un instante final $t = T$ pertenezca a un conjunto dado Y_d. Entonces serán más efectivos controles cuya acción se distribuya más o menos uniformemente a lo largo del intervalo de tiempo que va de $t = 0$ a $t = T$ a controles que intenten que la propiedad deseada se verifique cuanto antes.

2 En 2002, la revista ESAIM:COCV (Control, Optimization and the Calculus of Variations), una de las líderes en la disciplina, publicó un volumen especial (volumen 8) en memoria de J.-L. Lions en el que se recoge una interesante colección de artículos de investigación que dan una perspectiva bastante completa del estado del arte en este campo. Por ejemplo, para una descripción de la situación actual en lo que respecta a la controlabilidad de las EDPs y su aproximación numérica, véase [25].

3 En japonés "tsu" significa puerto o bahía y "nami" ola.

4 Figuras tomadas de la página web: http://www.floodlondon.com/floodtb.htm, elaborada por R. Doyle en 2002.

5 http://www.pim.tsinghua.edu.cn/units/me/robot/en/home.html

6 http://www2.cmp.uea.ac.uk/~jrk/Robotics/digger/

7 Tomada de http://www.inrialpes.fr/bipop/

8 http://www.math.uni-hamburg.de/honre/hinze/nfdcon.html

9 http://www.engr.uky.edu/~jdjacob/fml/research/adaptive/index.html

10 http://www.iat.jaxa.jp/kspc/english/research/nenseigyo.htm

11 http://ieeexplore.ieee.org/ie15/9270/29451/01334984.pdf

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Alamir, S. Chareyron, *State-constrained optimal control applied to cell-cycle- specific cancer chemotherapy,* en "Positive systems", Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 341, Springer, Berlin 2006.

[2] A. M. Annaswamy, *Nonlinear modeling and control of combustion dynamics,* en "Control of fluid flow", Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 330, Springer, Berlin 2006.

[3] S. Bennet, *A history of control engineering 1800-1930,* IEE Control Engineering Series 8, Peter Peregrinus Ltd., Londres 1979.

[4] P. Brumer, M. Shapiro, *Laser control of chemical reactions,* Scientific American, 1995, 34-39.

[5] H. Choset, K. M. Lynch, S. Hutchinson, G. Kantor, W. Burgard, L. E. Kavraki, S. Thrun, *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations,* MIT Press, Boston 2005.

[6] R. C. Dorf, *Sistemas modernos de control,* Addison Wesley Iberoamericana, 1989.

[7] E. Fernández-Cara, *On the approximate and null controllability of the Navier-Stohes equations,* SIAM Review, **41** (2) (1999), 269-277.

[8] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *Control Theory: History, mathematical achievements and perspectives,* Bol. SeMA **26,** 2003, 79-140.

[9] A. Friedman, *A hierarchy o f cancer models and their mathematical challenges,* Discrete Cont. Dyn. Sys. - Ser. B, **4** (2) (2004), 147-159.

[10] R. E. Kalman, *Optimization, mathematical theory of control theory,* en "Encyclopaedia Britannica", 15th ed., 1974, 636-638.

[11] W. S. Levine, *Control System Applications,* CRC Press, 2000.

[12] M. Lezaun *Optimización de la planifcación del trabajo en empresas que trabajan a turnos,* http://weblogs.madrimasd.org/matematicas/, febrero, 2007.

[13] J.-L. Lions, *Are there connections between turbulence and controllability?,* en "Analyse et optimisation de systèmes", Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 144, Springer-Verlag, Berlin 1990.

[14] C. Lozano y F. Palacios, *Las Matemáticas del diseño de aviones,* en "Weblog Matemáticas y sus fronteras", http://weblogs.madrimasd.org/matematicas/, enero, 2007.

[15] O. Mayr, *The origins of feedback control,* MIT Press, Cambridge MA 1970.

[16] P. Moin, Th. Bewley, *Feedback control of turbulence,* en "Mechanics USA 1994", A. S. Kobayashi ed., Appl. Mech. Rev., **47** (6) (1994), S3-S13.

[17] F. Monge, F. Palacios, *Necesidades futuras en investigación aerodinámica,* en "Las Matemáticas en la Comunidad de Madrid: Computación e interacción I+D+i", M. de León *et al.* eds., 105-118, 2006 (http://www.imdea.org).

[18] R. M. Murray, ed., *Control in an information Rrich Wworld: Rreport of the panel on future directions in control, dynamics, and systems,* SIAM, 2003.

[19] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna,* Prentice Hall Hispanoamericana, 1998.

[20] M. Salomone, *Los humanoides ya están aquí,* El País Semanal, 12338, 18 de junio del 2000.

[21] SIAM, *Future directions M Control Theory,* report of the panel of future Directions in Control Theory, SIAM Report on Issues in Mathematical Sciences, Philadelphia, 1988.

[22] Y. Tao, M. Chen, *An elliptic-hyperbolic free boundary problem modelling cancer therapy,* Nonlinearity 19 (2006), 416-440.

[23] R. H. Thurston, *A History of the Growth o f the Steam-Engine Stevens Institute of Technology,* Hoboken, N.J. http://www.history.rochester.edu/steam/thurston/1878/.

[24] E. Zuazua, *Las Matemáticas del Control,* en "De la Aritmética al Análisis: Historia y desarrollo recientes en Matemáticas", MEC, Aulas de Verano, Instituto Superior de Formación de Profesorado, 2004, 245-316.

[25] E. Zuazua, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods,* SIAM Review, **47** (2) (2005), 197-243.